* Calcul de $g(2)$:

$g(2)=x \Leftrightarrow f(x)=2 \Leftrightarrow 1+tgx=2 \Leftrightarrow tgx=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$

car $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Donc $g(2)=\frac{\pi}{4}$.

* Calcul de $g(1)$:

$g(1)=x \Leftrightarrow f(x)=1 \Leftrightarrow 1+tgx=1 \Leftrightarrow tgx=0 \Leftrightarrow x=0$

car $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Donc $g(1)=0$ d'où $\mathbf{I}=\frac{\pi}{4}$

Solution 3 :

1°/ $x\mapsto x^n\sqrt{1-x}$ est continue sur $]-\infty,1]$ en particulier sur $[0,1]$

d'où $\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$ existe.

$U_{n+1}-U_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}(x-1)\,dx$

$\forall x\in[0,1]$, $x^n\sqrt{1-x}(x-1)\le 0$ d'où $\forall n\in\mathbf{N}$, $U_{n+1}-U_n\le 0$ d'où (U_n) est une suite décroissante.

On a : $\forall x\in[0,1]$, $x^n\sqrt{1-x}\ge 0$ d'où $U_n\ge 0$ d'où (U_n) est une suite minorée par 0.

2°/a) f_n est continue sur $[0,1]$; f_n est dérivable sur $[0,1[$

$$\forall x\in[0,1[,\ f_n'(x)=nx^{n-1}\sqrt{1-x}+x^n\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{2nx^{n-1}(1-x)-x^n}{2\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{x^{n-1}(2n-2nx-x)}{2\sqrt{1-x}}=\frac{x^{n-1}(2n-(2n+1)x)}{2\sqrt{1-x}}$$

x	0		$\frac{2n}{2n+1}$		1
$f_n'(x)$		+	0	−	
$f_n(x)$	0	↗	M_n	↘	0